



Razi University

Logic Circuits Design

Computer Engineering Department of
Razi University

Dr. Abdolhossein Fathi





ساده سازی توابع منطقی





ساده سازی توابع منطقی

- یکی از مراحل اصلی طراحی، تحلیل و پیاده سازی توابع بولی و مدارات منطقی ساده کردن آن عبارت تا حد امکان می باشد. به عبارت بهتر بدست آوردن ساده ترین شکل تابع می باشد چراکه:
 - عبارت ساده تر تحلیل و ارزیابی راحتی خواهد داشت.
 - عبارت ساده تر به تعداد عملگر یا گیت کمتری برای پیاده سازی نیاز خواهد داشت:
 - هزینه ساخت پایین تر
 - سرعت ارزیابی و اجرای بالاتر
 - میزان مصرف توان کمتر



■ روش های ساده سازی

- استفاده مستقیم از اصول و قضایای جبر بول
- استفاده از جدول کارنو
- استفاده از الگوریتم کوئین-مک کلاسکی



ساده سازی توابع منطقی با جدول کارنو

- **کارنو** از نمایش جدولی توابع برای استفاده راحت تر از اصول و قضایای جبر بول در ساده سازی آنها بهره گرفت.
- جدول کارنو برای ساده سازی توابع تا حداقل ۶ ورودی مناسب می باشد.
- در این روش با توجه به تعداد ورودی ها یک جدول برای نمایش تابع در نظر گرفته می شود؛ و به هر میترم یک خانه از این جدول اختصاص می یابد.
- چیدمان خانه های جدول به نحوی در نظر گرفته می شود که میترم هر خانه با میترم های خانه های اطراف خود (همسایه های بالا و پایین و چپ وراست) فقط در یک قرم یا متغیر تفاوت داشته باشند (اصطلاحا همسایه هم باشند)
- برای یک تابع می توان چندین جدول کارنو در نظر گرفت که خاصیت بالا را داشته باشند. البته با استفاده از هر کدام از آنها می توان به ساده ترین عبارت ممکن برای یک تابع رسید.
- برخی توابع ممکن است چندین حالت بھینه برای ساده سازی داشته باشند که همه آنها از نظر تعداد عبارت و طول عبارتها یکسان می باشند. هر کدام از این عبارتها را می توان به عنوان ساده ترین حالت در نظر گرفت.



چیدمان جدول کارنو برای توابع ۲ و ۳ متغیره

جدول کارنو توابع دو متغیره $f(x,y)$

	x	y	0	1
0		m_0	m_1	
1		m_2	m_3	

	x	y	0	1
0		m_0	m_2	
1		m_1	m_3	

جدول کارنو توابع سه متغیره $f(x,y,z)$

	x	yz	00	01	11	10
0			m_0	m_1	m_3	m_2
1			m_4	m_5	m_7	m_6

	z	xy	00	01	11	10
0			m_0	m_2	m_6	m_4
1			m_1	m_3	m_7	m_5



چیدمان جدول کارنو برای توابع ۴ متغیره

■ جدول کارنو توابع چهار متغیره $f(x,y,z,w)$

xy	zw	00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

xy	zw	00	01	11	10
00	0	4	12	8	
01	1	5	13	9	
11	3	7	15	11	
10	2	6	14	10	

شماره میترها



چیدمان جدول کارنو برای توابع ۵ متغیره

$f(x,y,z,w,t)$

به جای جدول ۳۲ خانه ای از ۲ جدول ۱۶ خانه ای استفاده می شود.



		yz	wt	00	01	11	10
		00		0	1	3	2
		01		4	5	7	6
		11		12	13	15	14
		10		8	9	11	10
x=0							



		yz	wt	00	01	11	10
		00		16	17	19	18
		01		20	21	23	22
		11		28	29	31	30
		10		24	25	27	26
x=1							

ساده سازی توابع با کمک جدول کارنو

- ۱- رسم جدول کارنو با توجه به تعداد متغیرهای تابع مورد نظر
- ۲- قراردادن مینترم ها تابع در داخل جدول کارنو
- ۳- تعیین حداقل تعداد مجموعه که همه مینترمهای با مقدار ۱ را شامل شود:
 - ۱-۱- تعداد یکهای هر مجموعه باید توانی از ۲ باشد.
 - ۱-۲- مجموعه های با تعداد ۱ بیشتر نسبت به مجموعه های کوچکتر اولویت دارند.
 - ۱-۳- در صورت نیاز می توان از یکهای مربوط به سایر مجموعه ها برای داشتن یک مجموعه بزرگتر استفاده کرد.
- ۴-۳- در هر مجموعه باید حداقل یک مینترم باشد که متعلق به هیچ مجموعه دیگری نباشد، و گرنه آن مجموعه اضافی بوده و باید حذف گردد.
- ۴- عبارت معادل هر مجموعه را بدست می آوریم.
- ۵- ترکیب همه عبارت ها برابر ساده ترین عبارت حاصل خواهد بود.

مثال: ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو

تابع زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$F_1(x,y) = \sum m(1,2,3)$$

$$F_1(x,y) = y + x$$

	x	0	1
y	0	0	1
	1	1	1

$$F_2(x,y) = \sum m(3)$$

$$F_2(x,y) = xy$$

	x	0	1
y	0	0	0
	1	0	1

	yz	00	01	11	10
x	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0

$$F_1(x,y,z) = \sum m(2,3,4,5)$$

$$F_1(x,y,z) = x'y + xy'$$

	yz	00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	1	0	1	1

$$F_2(x,y,z) = \sum m(3,4,6,7)$$

$$F_2(x,y,z) = yz + xz'$$

	yz	00	01	11	10
x	0	1	0	0	1
	1	1	0	0	1

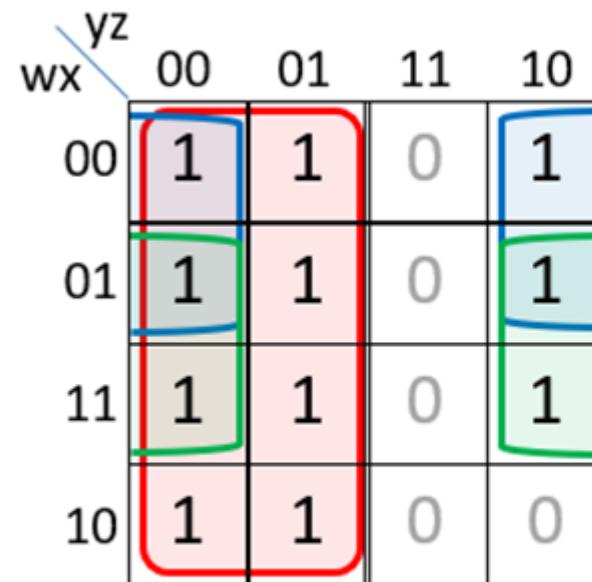
$$F_3(x,y,z) = \sum m(0,2,4,5,6)$$

$$F_3(x,y,z) = z' + xy'$$

مثال: ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو

تابع زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$F(w,x,y,z) = \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$$



A Karnaugh map for four variables (w, x, y, z) showing the function $F(w,x,y,z) = \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$. The map is a 4x4 grid with rows labeled by wx values (00, 01, 11, 10) and columns labeled by yz values (00, 01, 11, 10). The cells are filled with 1s where the function value is 1, and 0s where it is 0. Red rectangles highlight groups of 1s: one group of 4 (wx=00, yz=00, 01, 11), one group of 2 (wx=10, yz=00, 10), and two groups of 1 (wx=01, yz=01, 11; wx=11, yz=01, 10). Green rectangles highlight smaller groups: one group of 2 (wx=00, yz=00, 01) and one group of 1 (wx=01, yz=11).

yz \ wx	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

$$F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$$

مثال: ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو

تابع زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$$

Essential Prime Implicant: $B'D'$, BD

Prime Implicant: CD , $B'C$, AB' , AD

$$F(A,B,C,D) = B'D' + BD + CD + AD$$

$$= B'D' + BD + CD + AB'$$

$$= B'D' + BD + B'C + AD$$

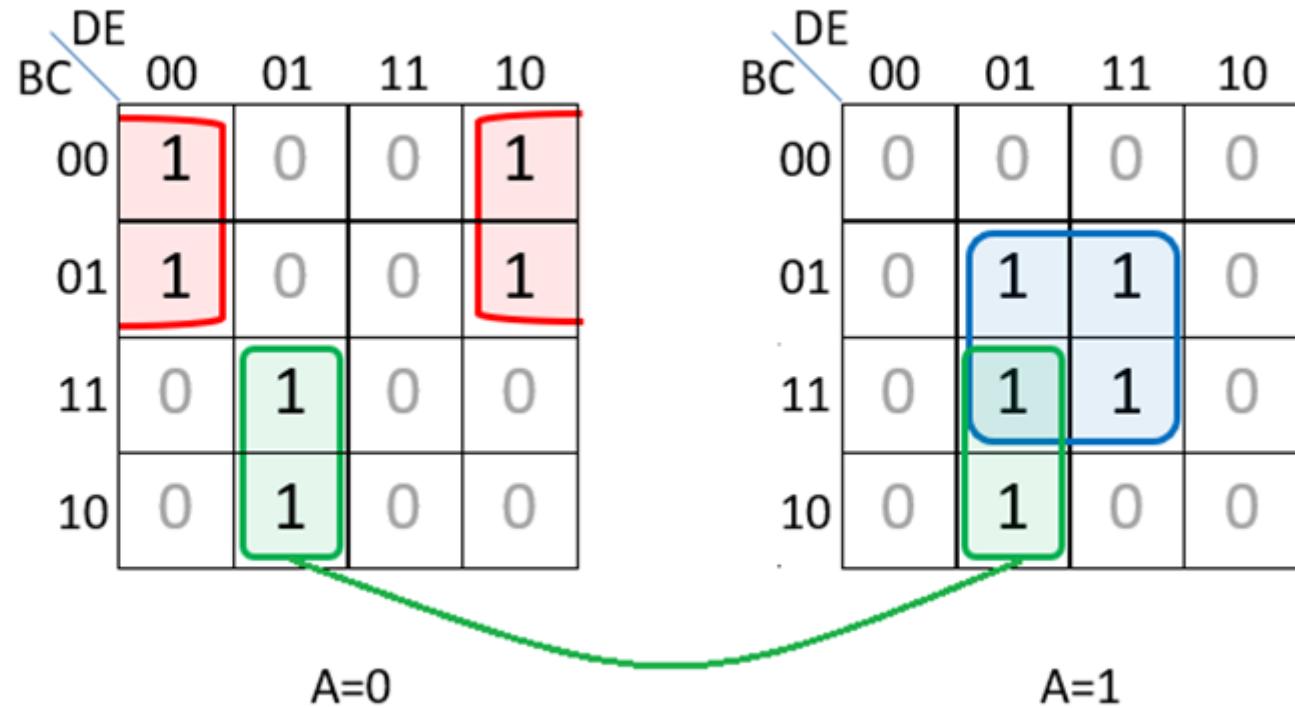
$$= B'D' + BD + B'C + AB'$$

AB	CD	00	01	11	10
00		1	0	1	1
01		0	1	1	0
11		0	1	1	0
10		1	1	1	1

مثال: ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو

تابع زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$F(A,B,C,D,E) = \sum m(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)$$



$$F(A,B,C,D,E) = A'B'E' + BD'E + ACE$$

مثال: ساده سازی توابع نیمه کاسته شده

تابع نیمه کاسته شده زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= A'C + A'B + AB'C + BC \\
 &= A'(B+B')C + A'B(C+C') + AB'C + (A+A')BC \\
 &= A'BC + A'B'C + A'BC + A'BC' + AB'C + ABC + A'BC \\
 &= m_3 + m_1 + m_3 + m_2 + m_5 + m_7 + m_3 \\
 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7
 \end{aligned}$$

$$F(A,B,C) = \sum m(1,2,3,5,7)$$

$$F(A,B,C) = C + A'B$$

		BC	00	01	11	10
		A	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	1	0	0



مثال: ساده سازی توابع نیمه کاسته شده

تابع نیمه کاسته شده زیر را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید:

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C,D) &= A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C' \\
 &= A'B'C'(D+D') + (A+A')B'CD' + A'BCD' + AB'C'(D+D') \\
 &= A'B'C'D + A'B'C'D' + AB'CD' + A'B'CD' + A'BCD' + AB'C'D + AB'C'D' \\
 &= m_1 + m_0 + m_{10} + m_2 + m_6 + m_9 + m_8 \\
 &= \sum m(0,1,2,6,8,9,10)
 \end{aligned}$$

	CD	00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	0	0	1
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

$$F(A,B,C,D) = B'C' + B'D' + A'CD'$$



ساده سازی توابع با حالت بی اهمیت

- **حالت بی اهمیت** به حالاتی و یا ترکیباتی از ورودیها گفته می شود که برای آنها خروجی مشخصی در تابع تعریف نشده باشد.

- این حالات در تابع با حرف **d** نمایش داده می شوند:

$$f(x,y,z,t) = \sum m(1,2,7,11,12,15) + \textcolor{red}{d}(0,3,6,9,13,14)$$

$$f(x,y,z,t) = \prod M(0,4,5,8,10). \textcolor{red}{d}(0,3,6,9,13,14)$$

- از این حالات به عنوان یک مؤلفه‌ی موثر در ساده سازی به خوبی می توان استفاده کرد؛ به این صورت که اگر ۱ بودن برخی از این حالات باعث بزرگتر شدن ها مجموعه ها و ساده سازی بیشتر شود، آنها را ۱ فرض میکنیم و اگر نه، به نفع ماست که آنها را ۰ فرض کنیم.



ساده سازی توابع با حالت بی اهمیت

تابع $F(w,x,y,z)$ با حالت های بی اهمیت d را به فرم های خواسته شده ساده کنید.

$$F(w,x,y,z) = \sum m(1, 3, 7, 11, 15)$$

$$d(w,x,y,z) = \sum m(0, 2, 5)$$

الف: به صورت جمع حاصل ضرب ها

ب: به صورت ضرب حاصل جمع ها

		yz		wx		
		00	01	11	10	y
		wx	wx	wx	wx	
w	00	X	1	1	X	
	01	0	X	1	0	
	11	0	0	1	0	
	10	0	0	1	0	
		z		x		

$$F(w,x,y,z) = w'z + yz$$

$$\text{Alternative: } F(w,x,y,z) = w'x' + yz$$

		yz		wx		
		00	01	11	10	y
		wx	wx	wx	wx	
w	00	X	1	1	X	
	01	0	X	1	0	
	11	0	0	1	0	
	10	0	0	1	0	
		z		x		

$$F'(w,x,y,z) = z' + wy'$$

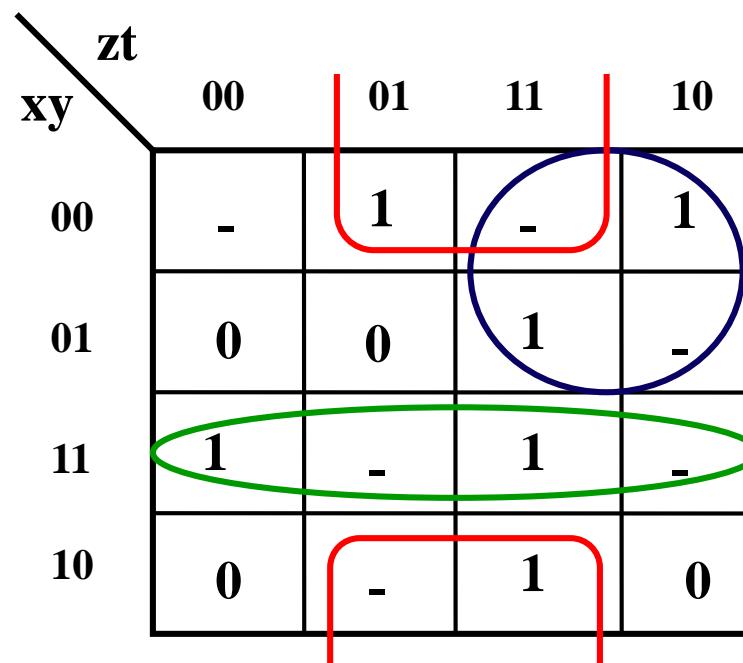
$$\Rightarrow F(w,x,y,z) = z(w' + y)$$



ساده سازی توابع با حالت بی اهمیت

$$f(x,y,z,t) = \sum m(1,2,7,11,12,15) + d(0,3,6,9,13,14)$$

$$f(x,y,z,t) = x'z + xy + y't$$





ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

- برای کوچکتر کردن اندازه جداول کارنو می توان یک یا چند متغیر را از سمت چپ جداول صحت حذف و آنها را به سمت راست جدول منتقل نمود یعنی در داخل تابع درج کرد.

■ به این متغیرها، متغیرهای درجی گویند

- با درج هر متغیر تعداد حالات یعنی اندازه جدول به نصف کاهش پیدا می کند.

■ برای درج هر متغیر باید در جدول اصلی هر دو حالتی که در آنها سایر متغیرها یکسان هستند را باهم ترکیب کرده و یک مقدار جدید برای آن دو حالت بدست یاوریم. این مقدار جدید بیان کننده رابطه مقدار مقدار تابع با مقدار متغیر حذف شده خواهد بود و به یکی از چهار حالت زیر می باشد:

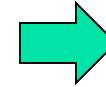
- مقدار تابع و مقدار متغیر حذف شده یکسان باشند (مقدار جدید برابر متغیر قرار می گیرد)
- مقدار تابع در هر دو حالت عکس متغیر باشد (مقدار جدید برابر NOT متغیر قرار می گیرد)
- مقدار تابع در هر دو حالت برابر ۱ باشد (مقدار جدید برابر ۱ قرار می گیرد)
- مقدار تابع در هر دو حالت برابر ۰ باشد (مقدار جدید برابر ۰ قرار می گیرد)



ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

- اگرچه هر کدام از متغیرها را می‌توان درج کرد اما راحت‌ترین راه، درج متغیر سمت راست (متغیر در ارزش کمتر) می‌باشد که در آن هر دو حالت کنار هم قرار دارند.

			F	درج متغیر z در تابع F
x	y	z		
0	0	0	0	$F = 0$
0	0	1	0	$0.z' + 0.z = 0 + 0 = 0$
0	1	0	0	$F = z$
0	1	1	1	$0.z' + 1.z = 0 + z = z$
1	0	0	1	$F = z'$
1	0	1	0	$1.z' + 0.z = z' + 0 = z'$
1	1	0	1	$F = 1$
1	1	1	1	$1.z' + 1.z = z' + z = 1$



x	y	F
0	0	0
0	1	z
1	0	z'
1	1	1

- با این روش می‌توان هر کدام از متغیرهای دیگر را هم درج کرد البته ابتدا باید دو حالت یکسان را جدا کرده و سپس آنها را باهم به همین شیوه ترکیب کرد.



ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

- برای درج متغیر x ردیف هایی که در آنها y و z برابر هستند را به کنار هم منتقل کرد و ستون مربوط به x را به آخر منتقل می کنیم، سپس آن را درج می کنیم

Original Karnaugh Map:

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Simplified Tables:

y	z	x	F	درج متغیر z در تابع F
0	0	0	0	$F = x$
0	0	1	1	$0 \cdot x' + 1 \cdot x = 0 + x = x$
0	1	0	0	$F = 0$
0	1	1	0	$0 \cdot x' + 0 \cdot x = 0 + 0 = 0$
1	0	0	0	$F = x$
1	0	1	1	$0 \cdot x' + 1 \cdot x = 0 + x = x$
1	1	0	1	$F = 1$
1	1	1	1	$1 \cdot x' + 1 \cdot x = x' + x = 1$

y	z	F
0	0	x
0	1	0
1	0	x
1	1	1



ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

- **مرحله اول:** به ازای تک تک متغیرها یک جدول کارنو در نظر گرفته و در آن تمام متغیرهای دیگر را صفر و یک ها را بصورت بی اهمیت (don't care) در نظر گرفته و جدول را ساده می کنیم تا ساده ترین عبارت آن بدست آید.
- برای متغیری مثل z یک جدول و برای مکمل آن یعنی ' z' هم یک جدول لازم است.
- **مرحله دوم:** تمام متغیرها را صفر کرده و یک های با پوشش مضاعف را بی اهمیت در نظر گرفته و سایر یک ها را در جدول قرارداده و ساده می کنیم.
- یک با پوشش مضاعف به یکی گفته می شود که در مراحل قبل (زمانیکه به عنوان بی اهمیت با متغیرها می آید) یکبار با متغیری مثل z و یکبار دیگر همان یک با NOT آن متغیر ($'z'$) در ساده سازی استفاده شده باشد.
- **مرحله سوم:** مجموع عبارات تمام جداول به عنوان ساده شده تابع کنار هم قرار می گیرد.



ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

y \ x	0	1
0	0	z
1	z'	1

جدول با متغیر درجی مقابله را ساده کنید.

مرحله اول:

y \ x	0	1
0	0	z
1	0	-

zx

y \ x	0	1
0	0	0
1	z'	-

yz'

مرحله دوم:

y \ x	0	1
0	0	0
1	0	-

0

یک با پوشش مضاعف: هم با z و هم با z' در ساده سازی استفاده شده است.

$$F(x,y,z) = zx + yz' + 0 = zx + yz'$$

مرحله سوم:



ساده سازی جدول کارنو با متغیر درجی

	AB	00	01	11	10
C	0	1	D	0	0
	1	D'	1	1	0

مرحله دوم:

	AB	00	01	11	10
C	0	-	0	0	0
	1	0	1	1	0

BC

یک با
پوشش
 مضاعف

جدول با متغیر درجی مقابله را ساده کنید.

	AB	00	01	11	10
C	0	-	D	0	0
	1	0	-	-	0

مرحله اول:

A'C'D

	AB	00	01	11	10
C	0	-	0	0	0
	1	D'	-	-	0

A'B'D'

مرحله سوم:

$$F(A,B,C,D) = A'C'D + A'B'D' + BC$$

پیاده سازی توابع با استفاده فقط NAND یا NOR

برای پیاده سازی تابع با گیت های NAND (دستیابی به ساختار NAND-NAND) :

- I. با استفاده از روش نقشه، تابع را به فرم جمع حاصل ضرب ها (آرایهی AND-OR) پیاده سازی می کنیم.
- II. در خروجی گیت های AND و ورودی های گیت های OR حباب اضافه می کنیم.
- III. حباب ورودی گیت های OR را با تغییر عمل این گیت ها به AND به خروجی آن منتقل می کنیم.

برای پیاده سازی تابع با گیت های NOR (دستیابی به ساختار NOR-NOR) :

- I. با استفاده از روش نقشه، تابع را به فرم ضرب حاصل جمع ها (آرایهی OR-AND) پیاده سازی می کنیم.
- II. در خروجی گیت های OR و ورودی های گیت های AND حباب اضافه می کنیم.
- III. حباب ورودی گیت های AND را با تغییر عمل این گیت ها به OR به خروجی آن منتقل می کنیم.



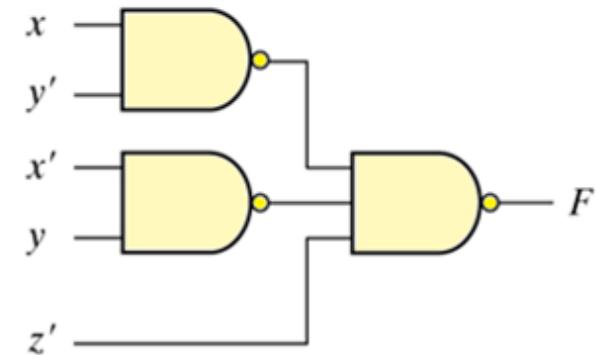
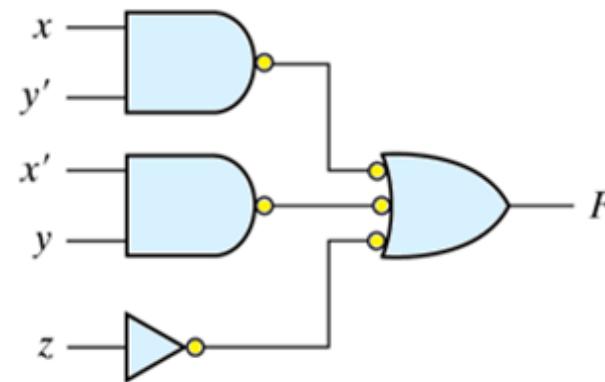
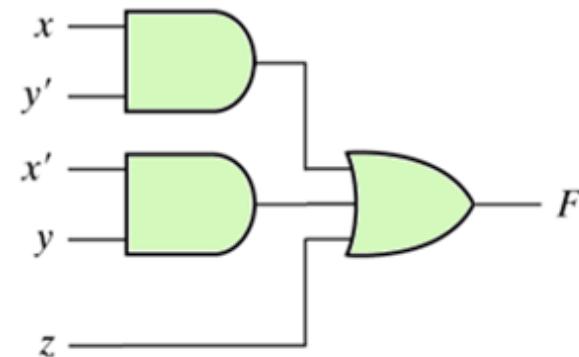
پیاده سازی توابع فقط با استفاده NAND

مثال: تابع $F(x,y,z)$ را با گیت های NAND پیاده سازی نمایید.

$$F(x,y,z) = \sum m(1,2,3,4,5,7)$$

	yz	00	01	11	10	y
x	0	0	1	1	1	
z	1	1	1	1	0	
						x

$$F(x,y,z) = z + x'y + xy'$$





پیاده سازی توابع فقط با استفاده NOR

$$F(x,y,z) = \sum m(1,3,4,5,7)$$

تابع $F(x,y,z)$ را با گیت های NOR پیاده سازی نمایید.

	yz	00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
z	1	1	1	1	0

